5.2. Košijev zadatak za homogenu i kvazilinearnu PDJ prvog reda

Razmotrimo Košijev zadatak za homogenu PDJ prvog reda:

$$P(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=0\,, \tag{1}$$

$$z\big|_{x=\xi}=\alpha(y)\,. \tag{2}$$

Navodimo algoritam rješavanja Kz (1)-(2).

a) Naći prvi integral $\varphi(x,y)=C$ sistema karakteristika $\begin{cases} x'=P(x,y)\\ y'=Q(x,y)\end{cases}$ jednačine (1) (tj. proizvoljno rješenje jednačine $\dfrac{dx}{P(x,y)}=\dfrac{dy}{Q(x,y)}$).

b) Iz $\varphi(\xi,y)=\overline{C}$ naći $y=\psi\left(\overline{C}\right)$.

c) Funkcija $z=\alpha(\psi(\varphi(x,y)))$ je rješenje Kz (1)-(2).

Primjer 1. Naći rješenja koja zadovoljavaju uslove:

a) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\,,\ z\big|_{y=1}=2x\,,$ b) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+(2e^x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\,,\ z\big|_{x=0}=y\,.$

a) Iz $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{-y}$ dobijamo prvi integral $xy=C$. Zamijenimo $y=1$ u dobijeni prvi integral: $x=\overline{C}$. Saglasno navedenom algoritmu za rješavanje Kz imamo da je rješenje $z=2C=2xy$.

b) Iz $\dfrac{dx}{1}=\dfrac{dy}{2e^x-y}$ slijedi $y'+y=2e^x$, $ye^x-e^{2x}=C$ (prvi integral). Dalje je $y-1=\overline{C}$,

odnosno $y=1+\overline{C}$. Rješenje datog Kz je funkcija $z=1+C=1+ye^x-e^{2x}$.

Sada razmotrimo Košijev zadatak za kvazilinearnu PDJ prvog reda:

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)\,, \tag{3}$$

$$z\big|_{x=\xi}=\alpha(y)\,. \tag{4}$$

a) Naći prve integrala $\varphi_1(x,y,z)=C_1$ i $\varphi_2(x,y,z)=C_2$ sistema karakteristika jednačine (3) .

b) Iz $\varphi_1(\xi,y,z)=\overline{C_1}$ i $\varphi_2(\xi,y,z)=\overline{C_2}$ naći $y=\psi_1\left(\overline{C_1},\overline{C_2}\right)$ i $z=\psi_2\left(\overline{C_1},\overline{C_2}\right)$.

c) Formulom $\psi_2\left(\varphi_1(x,y,z),\varphi_2(x,y,z)\right)=\alpha\left(\psi_1\left(\varphi_1(x,y,z),\varphi_2(x,y,z)\right)\right)$ dato je rješenje Kz (3)-(4).